学校编码：10384　　　　　　　　　　　　　　　　　分类号________密级 ______

学号：B200323002　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　UDC ________

厦门大学

博　士　学　位　论　文

匹配理论的若干新结果

Some New Results On Matching Theory

林　泓

指导教师姓名：　郭　晓　峰　教授

专　业　名　称：　基　础　数　学

论文提交日期：　2006 年 5 月

论文答辩日期：　2006 年 6 月

学位授予日期：　2006 年　月

答辩委员会主席：__________

评　　阅　　人：__________

2006 年 **5** 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（　），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　）

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名：　　　　　　　日期：　　年　月　日

导师签名：　　　　　　　日期：　　年　月　日

摘　要

匹配理论是图论的一个基础分支，同时在理论化学、组合优化等研究中有十分重要的应用．目前匹配理论的主要研究方向之一是具有特定性质的存在完美匹配的图的构造和性质，比如：基本图、 n- 可扩图、 k- 临界图、 k- 圈共振图等，以及如何计算图的完美匹配数．本文主要研究一些在进行特定的顶点收缩运算后仍具有完美匹配的图的性质，并得到了一些特殊图类完美匹配数的上、下界．

下面是本文的一些主要结果．

1. 通过引入两种图的收缩运算： $\alpha_{(2n+1)}$- 收缩运算和 β_{2n}- 收缩运算，定义了两类新的图类，即 $(2n+1)$- 可收缩图和 $2n$- 对可收缩图． (令 G 是一个图．设 $S \subseteq V(G)$ 且 $|S| = 2n+1$．将 S 收缩为一个顶点后所得到的图记 $\alpha_{(2n+1)}(G,S)$．若 G 有完美匹配且对于任意 $S \subseteq V(G)$, $|S| = 2n+1$, 图 $\alpha_{(2n+1)}(G,S)$ 仍有完美匹配，则称 G 是一个 $(2n+1)$-可收缩图．设 $S_1, S_2, \cdots, S_{2n}$ 是 $V(G)$ 的两两不相交的子集，将 S_i, $i = 1, 2, \cdots, 2n$, 分别收缩为一点所得到的图记 $\beta_{2n}(G, S_1, S_2, \cdots, S_{2n})$．若 G 有完美匹配且对于 $V(G)$ 的任意 $2n$ 个两两不相交的子集 $S_1, S_2, \cdots, S_{2n}$, 其中 $|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_{2n}| = 2$, 图 $\beta_{2n}(G, S_1, S_2, \cdots, S_{2n})$ 仍有完美匹配，则称 G 是一个 $2n$- 对可收缩图)．我们利用 Tutte 定理给出了这两类图的充要条件和基本性质，讨论了它们与 n- 可扩图及 $2n$- 临界图间的关系．

2. 利用 $\alpha_{(2n+1)}$- 收缩 运算和 β_{2n}- 收缩 运算，给出 n- 可扩二部图的一些新刻划．

3. 确定了具有某些结构性质的图的完美匹配数紧的上界，其中，连通度为 k 的 $2n$ 阶图的完美匹配数紧的上界为 $k[(2n-3)!!]$, 独立数为 k 的 $2n$ 阶图的完美匹配数紧的上界为 $[\prod_{i=0}^{k-1}(2n-k-i)][(2n-2k-1)!!]$, 而色数为 k 的 $2n$ 阶图的完美匹配数紧的上界为 Turán 图 $T_{k,2n}$ 的完美匹配数 $\phi(T_{k,2n})$．

4. 分别确定了偶阶极大外平面图与树状三角系统和四角系统的完美匹配数的紧的上、下界．另外运用组合递推法和匹配因子定理给出了若干四角系统的完美匹配数的显式表达式．

关键词： 完美匹配， $(2n+1)$- 可收缩图， $2n$- 对可收缩图， n- 可扩图

Abstract

Matching theory is a basic subject in the graph theory with some important applications in theoretical chemistry and combinatorial optimization. The main focus of matching theory is to investigate the constructions and structual properties of graphs with perfect matchings, such as elementary graphs, n-extendable graphs, k-critical graphs and k-cycle resonant graphs, and enumerate the perfect matchings of graphs. In this paper, we study some graphs with perfect matchings which also have perfect matchings after contracting some vertices, and obtain some upper and lower bounds of the numbers of the perfect matchings of some special types of graphs.

Key contributions of this paper are as follows:

1. By introducting two types of vertex contractions in a graph, called $\alpha_{(2n+1)}$-*contraction* and β_{2n}-*contraction* respectively, we introduce two new classes of graphs, called *(2n+1)-contractible graphs* and *2n-pairs contractible graphs*. (Let G be a graph. For a subset S of $V(G)$ with $|S| = 2n+1$, $\alpha_{(2n+1)}(G, S)$ denotes the graph obtained from G by contracting S to a single vertex. If G has a perfect matching and, for any subset S of $V(G)$ with $|S| = 2n+1$, the graph $\alpha_{(2n+1)}(G, S)$ always has a perfect matching, then G is called a *(2n+1)-contractible graph*. For pairwise disjoint subsets $S_1, S_2, \cdots, S_{2n}$ of $V(G)$, $\beta_{2n}(G, S_1, S_2, \cdots, S_{2n})$ denotes the graph obtained from G by contracting each S_i, $i = 1, 2, \cdots, 2n$, to a single vertex respectively. If G has a perfect matching and, for any pairwise disjoint subsets $S_1, S_2, \cdots, S_{2n}$ of $V(G)$ with $|S_1| = |S_2| = \cdots = |S_{2n}| = 2$, the graph $\beta_{2n}(G, S_1, S_2, \cdots, S_{2n})$ always has a perfect matching, then G is called a *2n-pairs contractible graph*). Some simple necessary and sufficient conditions for a graph to be a $(2n+1)$-contractible (resp. a $2n$-pairs contractible) graph are established by using the Tutte Theorem. We also investigate the relations between $2n$-critical graphs, $(2n+1)$-contractible graphs, $2n$-pairs contractible graphs, and n-extendable graphs.

2. Some novel characterizations of n-extendable bipartite graphs are given based on the $\alpha_{(2n+1)}$-contraction and β_{2n}-contraction.

3. The tight upper bounds of the numbers of perfect matchings in graphs with some structual properties are determined. We prove that the tight upper bound of the

numbers of perfect matchings of graphs with $2n$ vertices and with connectivity k(rsep. independence number k) is $k[(2n-3)!!]$(rsep. $[\prod_{i=0}^{k-1}(2n-k-i)][(2n-2k-1)!!]$), and the tight upper bound of the numbers of perfect matchings of graphs with $2n$ vertices and with chromatic numbers k is $\phi(T_{k,2n})$, where $\phi(T_{k,2n})$ denotes the number of perfect matchings of the Turán graph $T_{k,2n}$.

4. Some tight upper and lower bounds of the numbers of perfect matchings of the maximal outer plannar graphs, treelike triangular lattices and treelike polyminoes are obtained. Moreover, by using recursive calculation and matching factorization theorem, some explicit formules for the number of the perfect matchings of some polyminoes are given.

Key Words Perfect matching, $(2n+1)$-contractible graphs, $2n$-pairs contractible graphs, n-extendable graphs

目　　录

Contents

第一章　序　言

§1.1　匹配理论研究的一些背景及进展

设 $M = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$ 是图 G 的一个边子集，如果 M 中任意两条边互不相邻，则称 M 为图 G 的一个匹配．如果图 G 的一个匹配 M 饱和 G 中的每个顶点，则称 M 为 G 的完美匹配．图 G 的所有完美匹配的数目，记为 $\phi(G)$. 设 e 是一个有完美匹配的图 G 的一条边，若 e 被 G 的某个完美匹配所包含，则称 e 为 G 的一条容许边，反之若 e 不被 G 的任一个完美匹配所包含则称 e 为 G 的一条禁止边．设 C 是图 G 的一个圈．若 $G - V(C)$ 有完美匹配，则称 C 为图 G 的一个好圈．设 G 是一个图， M 是 G 的一个最大匹配，则 G 中未被 M 所饱和的顶点数称为 G 的亏数，记为 $def(G)$. 图 G 的奇分支数记为 $c_o(G)$, 而图 G 的分支数记为 $c(G)$. 若无特别说明，本文仅考虑有限的简单图.

匹配理论的研究有着一百多年悠久的历史．它的起源与某些实际应用问题有关．随着研究的不断深入，它不但自身发展成为图论的一个内容丰富的基础分支，而且对于一些新的组合方法及分支的产生与发展起到催化作用，如组合优化，化学图论等．Lovász 和 Plummer 在其匹配理论专著 [LP1] 对此作了详细介绍.

匹配理论早期的研究主要集中在如何判定一个图是否存在着完美匹配． Petersen 在这方面做了先驱性的工作，他在 1891 年的一篇论文中首先证明了任何一个没有两条以上割边的 3- 正则连通图都有完美匹配.

德国数学家 Frobenius 在 1917 年给出了二部图存在完美匹配的一个充要条件.

定理 1.1.1 [Frobenius].　一个二部图 $G(A, B)$ 有完美匹配当且仅当 $|A| = |B|$, 并且对任意 $X \subseteq A$, 不等式 $|N_G(X)| \geq |X|$ 成立.

到了 1947 年， Tutte 则首先给出了判定一个图是否存在完美匹配的一个充要条件.

定理 1.1.2 [Tutte].　一个图 G 有完美匹配当且仅当对任意 $S \subseteq V(G)$, 不等式 $c_o(G - S) \leq |S|$ 成立.

以上定理解决了如何判定一个图是否存在完美匹配这样一个问题，然而它还不足以刻划有完美匹配且有特定性质的图的结构性质．为此，人们陆续引入了各种图类，如

基本图， 1- 可扩图，因子临界图，双临界图． Lovász 和 Plummer 在专著 [LP1] 中概况了这些图类的性质及其构造方法．自 1980 年来，又有许多新的图类被引入，如 n- 可扩图， k- 临界图， k- 圈共振图等.

以下我们列举一些在匹配理论中较重要的图类及其主要性质.

1. **基本图** (elementary graphs)

设 G 是一个有完美匹配的图，若它的容许边导出一个连通图，则称 G 是一个基本图.

定义 1.1.3 [LP1]. 设 G 是一个图. 对 $V(G)$ 的一个子集 X, 若 $c_o(G-X) = def(G)+|X|$, 则称 X 为图 G 的一个 barrier 集．而称满足 $def(G-S) = def(G)+|S|$ 的 $V(G)$ 的子集 S 为 G 的一个 extreme 集.

基本图有以下基本性质.

定理 1.1.4 [LP1]. 若 G 是一个基本图，而 S_1,...,S_k 为图 G 的所有极大 barrier 集，则 $P(G) = \{S_1, ..., S_2\}$ 恰为 $V(G)$ 的一个划分.

上述定理定义的 $P(G) = \{S_1, ..., S_2\}$ 也常称为基本图 G 的一个典型划分.

设 G 是一个图．以 $D(G)$ 表示 G 的这样一些顶点的集合，它们中任一个顶点不被 G 的某个最大匹配所饱和．以 $A(G)$ 表示在 $V(G) \setminus D(G)$ 中与 $D(G)$ 某个点相邻的点的集合．而 $C(G) = V(G) \setminus (A(G) \cup D(G))$.

对于基本图，则有以下一些刻划.

定理 1.1.5 [LP1]. 一个图 G 是基本图当且仅当 $def(G) = 0$, 且对于任意 $x \in V(G)$, $C(G-x) = \emptyset$.

定理 1.1.6 [LP1]. 一个图 G 是基本图当且仅当对任意 $X \subseteq V(G)$, 不等式 $c_o(G-X) \leq |X|$ 成立，且若有一个非空子集 X 使以上不等式的等号成立，则 $G-X$ 没有偶分支.

以下定理刻划了基本图在结构上一些性质.

定理 1.1.7 [LP1]. 设 $P(G) = \{S_1, ..., S_2\}$ 是基本图 G 的一个典型划分．则有

(a) $X \subseteq V(G)$ 是 G 一个 extreme 集当且仅当 $X \subseteq S_i$, 其中 $1 \leq i \leq k$.

(b) x, y 是 G 的两个顶点，则 $G-x-y$ 有完美匹配当且仅当 x, y 在 $P(G)$ 的不同类中．特别地， $e=xy$ 是 G 的一条容许边当且仅当 x, y 在 $P(G)$ 的不同类中.

(c) 若 $\emptyset \neq X \subseteq S_i \in P(G)$, 则 $A(G-X)=S_i-X$ 且 $C(G-X)=\emptyset$.

(d) 设 $S \subseteq V(G)$. 则 $S \in P(G)$ 当且仅当 $G-S$ 恰好有 $|S|$ 个分支且每个分支都是因子临界图.

2. n- **可扩图** (n-extendable graphs)

设 G 是一个连通图且 $|V(G)| \geq 2n+2$. 若 G 有 n 条独立边，且任意 n 条独立边都可扩展为 G 的完美匹配，则称 G 是一个 n- 可扩图.

n- 可扩图的研究始于对 1- 可扩图的研究，而 1- 可扩图有许多良好的性质，例如：

定理 1.1.8 [Little, LP1]. 若 G 为 1- 可扩图， e_1, e_2 是 G 的任意两条边，则 e_1, e_2 在 G 的一个好圈上.

Hetyei 证明了对二部图而言，基本图与 1- 可扩图两个概念是等价的，并且刻划了 1- 可扩二部图的结构.

定理 1.1.9 [Hetyei, LP1]. G 是一个 1- 可扩二部图当且仅当 $G=x+P_1+P_2+...+P_r$, 这里 x 是一条边，而每个 P_i 都是一条奇长路，且 P_i 的两个端点分别在二部图 $x+P_1+P_2+...+P_{i-1}$ 的二分类中.

Hetyei 形象地称路 P_i 为耳朵，而称以上分解为 1- 可扩二部图 G 的一个耳朵分解. Lov*á*sz [LP1] 利用类似概念，刻划出一般 1- 可扩图的结构.

Plummer 在文 [P1] 中推广了 1- 可扩图的概念，首先提出了 n- 可扩图的概念，并证明了以下定理，从而说明了 n- 可扩图的存在性.

设 G 是一个图．以 $\delta(G)$ 表示图 G 的最小度， $\kappa(G)$ 表示图 G 的最大度.

定理 1.1.10 [P1]. 设 G 是一个有 $2p$ 个顶点的简单图， $1 \leq n \leq p-1$. 若 $\delta(G) \geq p+n$, 则 G 是一个 n- 可扩图.

另外在文 [P1], Plummer 得到如下一些 n- 可扩图的基本性质.

定理 1.1.11 [P1]. 若图 G 是一个 n- 可扩图，则 $\kappa(G) \geq n+1$.

定理 1.1.12 [P1]. 若图 G 是一个 n- 可扩图，则图 G 也是一个 $(n-1)$- 可扩图.